حول أثر المصفوفات المعرفة بشكل موجب

رياض الشحيد * عبدالله الشراعي *

خلاصة :

هـذا البحـث إسـتمرار للبحـث [٢] حـول المتراجحـات المتعلقـة بـأثر (Trace) المصفوفـات المعرفـة بشـكل موجـب (positive definite matrices) المشابهة للمتراجحات المألوفة .

* جامعة إب كلية العلوم قسم الرياضيات .

2 . مقدمـــة :

إن جميع المصفوفات المعتبرة في هذا البحـــث هـــي مصفوفـــات مربعـــة (Square matrices) من المرتبة nxn وعناصرها أعداد حقيقة .

تستخدم الرموز $tr(A)\ ,\ A^t\ ,\ A^{-1}\ ,\ A^2$ للدلالـــة علـــى مربـــع (Square) ، مقلـــوب (Inverse) ، منقـــــول (Transpose) وأثر (Trace) المصفوفة A .

ويدل الرمـــز I_n علـــى المصفوفـــة الواحديـــة (Identity matrix) من المرتبة nxn .

إذا كانت A مصفوفة معرفـــة بشـــكل موجـــب فنعـــبر عـــن ذلـــك بالرمز $A>O$.

من المعلوم أن $A>O$ إذا ، وفقط إذا ، كانت A متناظرة وكانت جميع جذورها المميزة (Characteristic roots) موجبة .. وهـــذا يكـــافئ وجـــود مصفوفة غير شاذة بحيث يكون $A=SS^t$.

وإذا كانت $A>O$ فإن $A^2>O\ ,\ A^{-1}>O\ ,\ A>O$ حيـــث A هو الجذر التربيعي (Square root) للمصفوفة A المعرفة بشكل موجب .

تتضمن الفقـــرة 3 , 4 مـــن هـــذا البحـــث بعـــض المتراجحـــات المثبتة سابقاً .. وتتضمن كذلك إثباتاً لبعض المتراجحات التي استخدمت في برهـــان النتيجة الأساسية .. وفي الفقرة 5 نثبت النتيجة الأساسية لهذا البحث. أخيراً نثبـــت في الفقرة ٦ بعض المتراجحات لأثر المصفوفات المعرفة بشكل موجـــب المشـــابهة لمتراجحات مألوفة .

3 . تمهيدية :

If $A > O$, $B > O$, $C > O$ *Then :*

(I) $tr(AB) > O$

(II) $tr(A^2)$? $[tr(A)]^2$.

(III) $tr(AB)$? $tr(A)\ tr(B)$

(IV) $ABC^2BA > O$

(V) $tr(ABC^2BA)$? $tr(A^2)\ tr(B^2)\ tr(C^2)$

البرهان :

For (I) , (II) and (III) (See [2]) .

(IV) بما أن :

$ABC^2BA = (ABC)(ABC)^t$, ABC مصفوفة غير شاذة

فإن :

$$ABC^2BA > 0 \ .$$

(V) بملاحظة (IV) والاعتماد على (III) نجد :

$$tr(ABC^2BA) = tr(A^2(BC^2B))$$

$$? \ tr(A^2)\ tr(BC^2B) \qquad (III)$$

$$= tr(A^2)\ tr(B^2C^2)$$

$$? \ tr(A^2)\ tr(B^2)\ tr(C^2)$$

$$\therefore tr(ABC^2BA) \ ? \ tr(A^2)\ tr(B^2)\ tr(C^2) \ .$$

4 . تمهيدية:

من أجل كل مصفوفتين A ، B لدينا

$$[tr(AB)]^2 \; ? \; tr(AA^t)\; tr(BB^t)$$

البرهان :

نفرض $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$AB = D = (d_{ij})$, $AA^t = A = (\alpha_{ij})$, $BB^t = B = (\beta_{ij})$

فنجد أن :

$$[tr(AB)]^2 = [tr(D)]^2$$

$$= [\sum_{i=1}^{n} d_{ii}]^2$$

$$= [\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}]^2$$

$$? \; (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ji}^2)$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji}^2)$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii})(\sum_{j=1}^{n} \beta_{jj})$$

$$= tr(A)\; tr(B)$$

$$= tr(AA^t)\; tr(BB^t)$$

$$\therefore [tr(AB)]^2 \; ? \; tr(AA^t)\; tr(BB^t) \; .$$

5 . **نظريـــة** :

$$\mathit{If}\ A > 0\ , B > 0\ , C > 0\ , \mathit{Then}:$$

$$tr(ABC) \; ? \; tr(A)\ tr(B)\ tr(C)$$

البرهان :

لإثبات ذلك نستخدم تمهيدية ٤ والمـــتراجحتين (V) ، (II)
في تمهيدية ٣ كما يلي:

$$[\ tr(ABC)\ ]^2 = [\ tr(A(BC))\ ]^2$$

$$? \quad tr(A^2)\ \ tr(BC^2B) \qquad (4)$$

$$? \quad tr(A^2)\ tr(B^2)\ tr(C^2) \qquad (V)$$

$$? \quad [\ tr(A)\ \ tr(B)\ \ tr(C)\ ]^2 \qquad (II)$$

$$\therefore \quad tr(ABC) \; ? \; tr(A)\ tr(B)\ tr(C) \quad .$$

6 . نظائر لبعض المتراجحات المألوفة :

إذا كان $_i > 0$ ($i = 1 , 2$) عندئـذ بالإعتمـاد على (الفقرة 5) نستطيع أن نضع متراجحة لأثر المصفوفات المعرفة بشكل موجـب والمشابهة لتلك الكائنة بين الوسط الحسابي والوسط الهندسي للأعداد الموجبة :

$$\left(\left| \operatorname{tr}(A_1 A_2 \quad {}_n) \right| \right)^{1/n} \ ? \quad \operatorname{tr}(A_1 + A_2 + \quad + A_n) / n$$

إضافة إلى ذلك يمكن إثبات المتراجحات التالية :

If $A > O$, $B > O$, $C > O$, *Then :*

(i) $[\operatorname{tr}(ABC)]^2 \ ? \ \operatorname{tr}(A^2) \ \operatorname{tr}(B^2) \ \operatorname{tr}(C^2)$

(ii) $[\operatorname{tr}(A+B)^2] \ ? \ [\operatorname{tr}(A^2)] + [\operatorname{tr}(B^2)]$

(iii) $\operatorname{tr}(A^2 + B^2 + C^2) \ ? \ \operatorname{tr}(A + B + C)^2$

(iv) $\operatorname{tr}(ABC)^n \ ? \ [\operatorname{tr}(A) \ \operatorname{tr}(A) \ \operatorname{tr}(C)]^n \ ; \ n \in N$

البرهان :

(i) يتم إثبات هذه المتراجحة بشكل مماثل لما تم في الفقرة 5 .

(ii) " هذه المتراجحة تناظر متراجحة مينكوفيسـكي (Minkowski) " ويتـم إثباتهـا بالاعتمـاد علـى متراجحـة كوشـي – شـفارتز (Cauchy (See[1]) كما يلي :

لدينا $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$

$$\Rightarrow \ tr(A+B)^2 = tr(A^2) + tr(B^2) + 2\,tr(AB)$$

$$? \ tr(A^2) + tr(B^2) + 2\,[\ tr(A^2)\ ]\ [\ tr(B^2)\ ]$$

$$= \Big(\,[\ tr(A^2)\ ] + [\ tr(B^2)\ ]\,\Big)^2$$

$$\therefore \ [\ tr(A+B)^2\ ] \ ? \ [\ tr(A^2)\ ] + [\ tr(B^2)\ ] \ .$$

(iii) لدينا بالاعتماد على متراجحة (I) :

$$tr(A^2+B^2+C^2) = tr(A^2) + tr(B^2) + tr(C^2)$$

$$? \ tr(A^2)+tr(B^2)+tr(C^2)+2tr(AB)+2tr(AC)+2tr(BC)$$

$$= tr(A+B+C)^2$$

$$\therefore \ tr(A^2+B^2+C^2) \ ? \ tr(A+B+C)^2$$

(iv) نضع بقصد الإختصار

$M=ABC$ و $N = M^t = CBA$ عندئذ $MN > 0$

ونجد بالتراجع :

$$[\ tr\,(ABC)^n\ ]^2 = [\ tr\,(M^n)\ ]^2 = [\ tr\,(M\,M^{n-1})\ ]^2$$

$$? \ tr(MN)\ \ tr(M^{n-1}\ N^{n-1}) \qquad (4)$$

$$= tr(MN)\ \ tr(M\,M^{n-2}\,N^{n-2}\,N)$$

$$= \ tr(MN) \quad tr((NM) \ (M^{n-2} N^{n-2}))$$

$$? \ tr(MN) \quad tr(NM) \quad tr(M^{n-2} N^{n-2})$$

(III)

$$= \ [\,tr(MN)]^{2} \quad tr\,(M^{n-2} \ N^{n-2})$$

$$? \ [\,tr(MN)\,]^{n-1} \quad tr(MN)$$

$$= [\,tr(MN)\,]^{n}$$

$$= [\,tr(ABC^{2}BA)\,]^{n}$$

$$? \ [\,tr(A^{2}) \quad tr(B^{2}) \ tr(C^{2})\,]^{n} \qquad (\,V\,)$$

$$? \ [\,tr(A) \ tr(B) \ tr(C)\,]^{2n} \qquad (\,II\,)$$

$$\therefore \ tr(ABC)^{n} \ ? \ [\,tr(A) \ tr(B) \ tr(C)\,]^{n} \quad .$$

References

[١] Bellman .R. General inequalities 2 . Proceedings of the Second International Conference on General inequalities . Held in Mathematical Research Institute at Oberwoffach, Black Forest . July 30 August 5 , 1978.

[2] Shehaid .R. University Researcher. V(1) , N(1) , (1998) , (289 293).

On trace of positive definite matrices

Abdollah Al-Shrae [*] Riad Shehaid [*]

Abstract :

In this note we present extension work [2] on trace analogous of the usual inequalities.

Ibb University .