بعض المتراجحات المتعلقة بأثر المصفوفات المعرفة بشكل موجب

الأستاذ المساعد د / رياض الشحيد

قسم الرياضيات – كلية العلوم ـ جامعة إب

[خلاصة البحث]

إن هذا البحث هو استمرار للبحث الذي قام به R . Bellman [1] حول المتراجحات المتعلقة بأثر (Trace) المصفوفات المعرفة بشكل موجب (Positive definite matrices) ، المشابهة للمتراجحات المألوفة .

إن جميع المصفوفات المعتبرة في هذا البحث هي مصفوفات مربعة (Square matrices) من المرتبة n×n وعناصرها أعداد حقيقية . تستخدم الرموز A1/2 , A2 , A-1 , At , tr(A) للدلالة على الأثر (Trace) ، المنقول (Transpose) ، المقلوب (Inverse) ، المربع (Square) والجذر التربيعي (Square root) على الترتيب للمصفوفة A . ويدل الرمز In على المصفوفة الواحدية (Identity matrix) من المرتبة n×n . إذا كانت A مصفوفة معرفة بشكل موجب فنعبر عن ذلك بالرمز A > 0 . من المعلوم أن المصفوفة A تكون معرفة بشكل موجب إذا وفقط إذا كانت جميع جذورها المميزة (Characteristic roots) موجبة ، وهذا يكافئ وجود مصفوفة غير شاذة (non-singular) S . بحيث يكون A = SS t (أنظر [2]) . في الفقرة ٤ . تحت عنوان (Theorem) تقع النتيجة الأساسية لهذا البحث . أما الفقرة ٣ (Lemma) فتتضمن إثباتات لبعض المتراجحات التي استخدمت في برهان النتيجة الأساسية. في الفقرة ٥ ندون متراجحتين لأثر المصفوفات المعرفة بشكل موجب المشابهة لتلك الكائنة بين الوسط الحسابي ، الوسط الهندسي والوسط التوافقي للأعداد الموجبة . وأخير في الفقرة ٦ وبالاعتماد على (I) و(II) من (Lemma) نستنتج متراجحة تبين لنا أن أثر مربع مجموع مصفوفتين معرفين بشكل موجب أصغر أو يساوي مربع مجموع أثريهما .

Some inequalities for positive definite matrices

1.**Abstract**. In this note we present extension work done by R. Bellman [1] on trace analogous of the usual inequalities concerning arithmetic , geometric and harmonic means .

2.**Introduction**. Except where stated otherwise, all matrices considered, are n×n matrices with real elements . The notations $t_r(A)$, A^t , A^{-1} , A^2 , $A^{1/2}$ are usual to denote respectively the trace, transpose , inverse, square power and square root of matrix A . I_n denotes the n×n identity matrix . We write $A > 0$ if A is a positive definite matrix . It is well known , that $A > 0$ if and only if there is a non-singular matrix S, such that $A = SS^t$, see [2] .

3.**Lemma** . *Let* $A > 0$, $B > 0$ *then*

(I) $t_r (A^2) \quad t_r(A)]^2$,

(II) $t_r (AB) \quad t_r(A) . tr(B)$,

(III) $t_r (AB) . t_r(A^{-1}B^{-1})$

(IV) $t_r (AB) > 0$.

Proof. Inequality (I) follows directly from well known Inequality for positive real numbers

$$_1^2 + {}_2^2 \qquad {}_n^2 \qquad {}_1 + {}_2 \qquad {}_n)^2 ,$$

with the fact that the characteristic roots of A^2 are the squares of the characteristic roots of A .

(II) By the Cauchy-Schwarz inequality [1], with inequality (I), we can write

$$t_r (AB) \quad t_r(A^2)]^{1/2} . [tr(B^2)]^{1/2}$$

$$t_r(A))^2]^{1/2} . [(tr(B))^2]^{1/2} = t_r(A) . tr(B) \quad .$$

To obtain (III) we use the fact that if $A > 0$, $B > 0$ then $ABA > 0$, with the fact that if $A > 0$ then $A^{-1} > 0$, $A^{1/2} > 0$ [2] . We use also (II) with the commutativity of the trace . Thus we have

$$n = t_r(I_n) = t_r(A^{1/2} BA^{1/2} A^{-1/2} B^{-1} A^{-1/2})$$

$$t_r(A^{1/2} BA^{1/2}) . t_r(A^{-1/2} B^{-1} A^{-1/2}) =$$

$$= t_r(AB) . t_r(A^{-1}B^{-1}) .$$

Hence

$$t_r(AB) . t_r(A^{-1}B^{-1}) \quad n$$

(IV) For A and B there exits non-singular matrices S and T such that $A = SS^t$ and $B = TT^t$. Using the commutativity of trace , we have

$$t_r(AB) = t_r(SS^t TT^t) = t_r(T^t SS^t T) = t_r[T^t S(T^t S)^t] > 0$$

Now from (III) and (IV) of lemma , we derive

$$t_r(AB) \qquad t_r(A^{-1}B^{-1}) ,$$

using inequality (II) , we obtain the main result of this paper :

4. **Theorem.** *If* $\mathbf{A > 0}$ *and* $\mathbf{B > 0}$, *then*

$$\mathbf{n / t_r(A^{-1}) . t_r(B^{-1}) \quad t_r(AB) \quad t_r(A) . t_r(B)} \quad .$$

5. **An analogue of the usual inequalities** . If $A > 0$ and $B > 0$,

then from the above theorem we can write an analogue of the usual inequalities concerning , geometric and harmonic means :

$$2 / t_r(A^{-1}) + t_r(B^{-1}) \qquad \overline{t_r(AB)} \quad t_r(A) + t_r(B) / 2 \ .$$

6.**An inequality for traces** . Let $A > 0$ and $B > 0$. We star with the matrix identity

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA \ .$$

Now taking the trace of both sides and using (I) and (II) of lemma we have

$$t_r(A + B)^2 = t_r(A)^2 + tr(B)^2 + 2t_r(AB) \ .$$

$$t_r(A)]^2 + [tr(B)]^2 + 2t_r(A)\, t_r(B) \ .$$

Hence

$$t_r(A + B)^2 \qquad t_r(A) + tr(B)]^2 = [t_r(A + B)]^2 \ .$$

Reference

[1] R. Bellman . General inequality 2 . Proceedings of the second International Conference on General inequalities . Held in Mathematical Research Institute at Oberwoffach , Black Forest . July 30 – August 5, 1978 .

[2] R. Bellman . Introduction to Matrix Analysis Mc Graw – Hill Book company , New york 1960 , 2nd Edition , 1970 .