مقدر ذو المرحلتين لدالة المعولية $R(t)$ المترافد لتوزيع ويبل

$(TSPE)$

Two Stage Pooling Reliability Function Pretistimator OF Weibull Distribution

جبار عبد مضحي

مدرس مساعد ، قسم الرياضات ، كلية التربية النادرة ، جامعة اب

١- المقدمة:

يُعتبر توزيع ويبل (Weibull Distribution) أحد التوزيعات المهمة ، والذي له تطبيقات ، مهمة في دراسة أنظمة الفشل (failure models). وقد تم وضع هذا التوزيع عام ١٩٥١ . وهو يبين لنا فائدة النظام عندما يكون هناك وقت للفشل ويحتوي على عدد من المكونات وان النظام يفشل إذا فشلت إحدى مكوناته .

إذا كان X متغيراً عشوائيا له توزيع ويبل فان دالة الكثافة الاحتمالية له هي :

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}} & ,x\geq 0\\ 0 & ,oth.\end{cases}$$

حيث أن $\alpha,\lambda>0$. والذي من خصائصه وجود معلمتين هما α و λ. و عندما $\alpha=1$ فان التوزيع يؤول إلى التوزيع الآسي $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ، ولهذا فان التوزيع ألأسي يعتبر حالة خاصة من توزيع ويبل.

ولإيجاد دالة التوزيع التجميعية له عندما $x<0$ فان:

$$F(x)=P(X\geq x)=1-P(X<x)=1-\int_0^{\infty}\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}dt=1-1=0$$ أما في

حالة أن $x\geq 0$ فان :

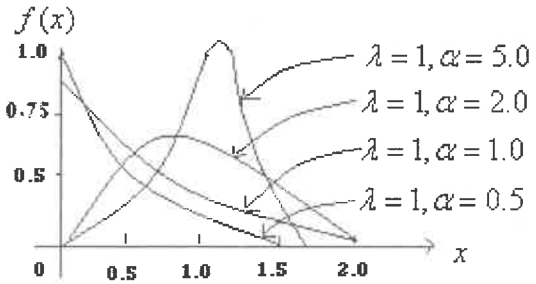
$F(x)=\int_0^{x}\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^{\alpha}}dt$ يمكن الحصول عليها من خلال إجراء التحويل الآتي :

$$u=\lambda t^{\alpha}\rightarrow t^{\alpha}=\frac{u}{\lambda}\rightarrow \alpha t^{\alpha-1}dt=\frac{du}{\lambda}\rightarrow dt=\frac{du}{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}$$

وعليه فان :

$$F(x)=\int_0^u \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-u}\frac{du}{\lambda\alpha t^{\alpha-1}}=\int_0^u e^{-u}du=-e^{-u}\Big|_0^u=1-e^{-u}=1-e^{-(\lambda t^{\alpha})}$$

والرسم أدناه يوضح توزيع ويبل عندما $\lambda=1$ ولقيم مختلفة من α :



الشكل(١- ١)يمثل توزيع ويبل عندما $\lambda=1$ ولقيم مختلفة من α

وبما أن التوزيع ألأسي هو حالة خاصة من توزيع ويبل ،وكانت الدراسات قد أشارت إلى استخدامات التوزيع الأسي في اختبارات الحياة وتقييمات المعولية(Life Testing and Reliability Evaluation)وإن أحد المشاكل المرتبطة بذلك هو تقدير معلمة التوزيع المجهولة λ ،وان تقدير دالة المعولية $R(t)$ لا يقل أهمية عن تقدير معلمة التوزيع λ .

لذا فإننا ستقوم بتقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل ،وحيث أن المعولية للنظام لزمن t تُعرف بأنها احتمالية أن يعمل النظام بصورة طبيعية (بدون توقف) حتى الزمن t .وتعطى الدالة المعولية كما يلي :

$$R(t)=1-F(t)\text{...}(1)$$

وبما أن $F(t)=1-e^{-(\lambda t^{\alpha})}$ تمثل دالة التوزيع التجميعية لتوزيع ويبل(Cumulative Distribution Function) وعلية فان :

$$R(t)=1-\left\{1-e^{-(\lambda t^{\alpha})}\right\}=e^{-(\lambda t^{\alpha})}\text{.........................}(2)$$

وإذا فرضنا بان $\lambda=\frac{1}{\theta}$ فان دالة المعولية لتوزيع ويبل يمكن أن نُعبر عنها بالشكل التالي :

$$R(t)=e^{-\frac{t^{\alpha}}{\theta}}\text{...}(3)$$

حيث أن $t>0$ ، $\theta>0$ و $\alpha>0$.

في حالة عدم توفر بعض المعلومات المسبقة حول المعلمتين λ و α فان عملية التقدير بالنسبة للمعلمتين و $R(t)$ تتم بإحدى الطرق الكلاسيكية(Classical Methods).أما اذا توفرت

بعض المعلومات وإن كانت على شكل توزيع سابق(Prior Distribution)فان طريقة بيز(Bayes) يتم تقديرهم بها.

أما اذا كانت المعلومات المسبقة على شكل قيم تقديرية أولية(Initial Value)فيتم تقديرهم بالطرق المسماة الاختبار الأولي(Preliminary Test)أوالتقلص(Shrunken Methods).

وكما هو واضح فان اعتماد توزيع ويبل على معلمتين α والتي تُشير إلى شكل التوزيع و θ التي تُشير إلى مقياس التوزيع ، وان التوزيع يتحول إلى توزيعاً أُسيا بوضع $\alpha = 1$ ، فان الدراسات التي تناولت دالة المعولية للتوزيع ألأسي(أنظر١) يمكن أن تُعمم نتائجها في بحثنا هذا وان α تأخذ عدة قيم تُظهر شكل توزيع ويبل ونقوم بعملية التقدير على المعلمة θ .

لتكن $\theta_\circ$ بعض المعلومات الأولية المتوفرة حول المعلمة θ ، وان استخدام $\theta_\circ$ في تقدير المعلمة θ و $R(t)$ قد يؤدي إلى حصولنا على تقديرات متحيزة (Bias)لكنها قد تتمتع بمتوسط مربعات خطأ(Mean Squared Error)أقل من التقديرات الكلاسيكية ، ولهذا هناك ما يُبرر استخدام $\theta_\circ$ [أنظر١٤].

كما أن الحصول على تقديرات غير مكلفة(أي تعتمد على عدد قليل من الوحدات التجريبية)يُعد أحد أهداف نظرية المعولية ، ولتحقيق هذا الهدف يتم اللجوء إلى أستخدام أسلوب التقدير ذو المرحلتين المترافد(TSPE).ويعرف هذا الأسلوب كما يلي :

نفرض أن $x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n1}$ عينة عشوائية أُخذت من $F(t)$ بحجم $n_1 < n$ ، ثم تُحسب $\hat{\theta}_1$ من تلك العينة ويكون مجال الاختبار الأولي R بالاعتماد على $\theta_\circ$.

اذا كان $\hat{\theta}_1 \in R$ فيكون المقدر المطلوب $K\hat{\theta}_1 + (1-K)\theta_\circ$ ، حيث أن $0 \le K \le 1$ عامل التقلص.

أما أذا كان $\hat{\theta}_1 \notin R$ فيتم استخدام المفردات المتبقية $x_{21}, x_{22}, ..., x_{2n_2}$ ثم تُحسب $\hat{\theta}_2$ وتُرفد بـ $\hat{\theta}_1$ لنحصل على:

$\hat{\theta} = (n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2)/n$ وهكذا يكون المقدر(TSPE) كما يلي :

$$\tilde{\theta} = \left\{ \left[K(\hat{\theta}_1 - \theta_\circ) + \theta_\circ \right] I_R + \hat{\theta} \quad I_{\bar{R}} \right\} ....(4)$$

حيث أن I_R و $I_{\bar{R}}$ هما دالتان رمزيتان لمجال القبول R ومجال الرفض $\bar{R}$.

إن شكل المقدر(٤)قد دُرس من قبل عدد كبير من الباحثين ولكن اغلب الدراسات تناولت

التوزيع الاسي بشكل خاص نورد منهم :

(Adke&others(1987),Handa&others(1988),Al- Hemyari(1999))

أما فيما يخص تقدير دالة المعولية $R(t)$ فان هناك عدد من الدراسات منها :

Sinha & Guttman(1976),Lingappiah(1978),Raganath-an &Kale(1979),Khan & others(1983),Pandey & Upadhyay(1985)).

إن جميع الدراسات أعلاه أهتمت باقتراح عدد من التقديرات البيزية ذات المرحلة الواحدة ولعينات كاملة أو مراقبة (Complete or Censored).ومن الجدير بالذكر إن الباحثين(-Al Hemyari&Moudhi(2004)) قد تناولا مشكلة تقدير دالة المعولية $R(t)$ للتوزيع ألأسي مفترضين توفر بعض المعلومات المسبقة بشكل $\theta_{\circ}$ حول المعلمة θ ، مع اقتراح مقدرات مقلصة ذات مرحلتين ولنوعين من عينات المراقبة(أنظر٢).

في هذا البحث سنقترح مقدراً لدالة المعولية يستخدم المعلومات المسبقة الأولية $\theta_{\circ}$ ، من خلال توزيع ويبل ويحقق احد أهداف نظرية المعولية وهو الحصول على مقدرات غير مكلفة وذلك من خلال تطبيق أسلوب (TSPE).

يُعرف المقدر(TSPE)المقترح لدالة المعولية كما يلي :

- من العينة $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots\ldots, x_{1n1}$ يتم تقدير $\hat{\theta}_1 = \overline{X}_1$ وتكوين المجال R بالاعتماد على $\theta_{\circ}$.
- إذا كان $\hat{\theta}_1 \in R$ يكون مقدر دالة المعولية كما يلي : $\hat{R}_1(t) = e^{-\frac{t^{\alpha}}{\theta_{\circ}}}$.
- أما اذا كان $\hat{\theta}_1 \notin R$ يتم حساب $\hat{\theta}_2$ من باقي المفردات وترفد مع $\hat{\theta}_1$ ويكون مقدر دالة المعولية هو :

$$\hat{R}_2(t) = e^{-\frac{nt^{\alpha}}{K(n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2)}} \qquad ,0 \le K \le 1$$

وعليه فان مقدر(TSPE)للدالة $R(t)$ يكون كما يلي :

$$\widetilde{R}(t) = \left\{ \left[e^{-\frac{t^{\alpha}}{\theta_{\circ}}} \right] I_R + \left[e^{-\frac{nt^{\alpha}}{K(n_1\hat{\theta}_1 + n_2\hat{\theta}_2)}} \right] I_{\overline{R}} \right\}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

حيث أن I_R و $I_{\overline{R}}$ قد عُرفتا في العلاقة (٤).

في هذا البحث سيتم دراسة المقدر المقترح (٥) لتقدير دالة المعولية $R(t)$ لتوزيع ويبل متناولاً أنواع

من العينات الشائعة الاستخدام في المعولية واختبارات الحياة منها الكاملة والمراقبة (n,B,n) ، (n,B,r_1) ، (n,B,r_2) ، (n,B,r_1,r_2) و$((n,c,r_3))$ انظر(٤)وستتم دراسة معادلات التحيز، متوسط مربعات الخطأ، والكفاءة النسبية للمقدر $\widetilde{R}(t)$ ومقارنتها مع البحوث ذات الصلة.

٢- المقدر المقترح $\widetilde{R}(t)$ باستخدام خطة العينة (n,B,n) :

إن العينة (n,B,n) تعني تلك العينة التي تحتوي على n من الوحدات من نفس النوع قد وضُعت تحت الاختبار وكل وحدة تفشل لا تُستبدل بوحدة جديدة وان الاختبار يستمر إلى n من وحدات الفشل(انظر ٤).

لتكن X_{ji} : تمثل أوقات الفشل التي تتبع الدالة $F(t)$ حيث $i=1,2,\ldots,n_j$ ، $j=1,2$ ، ونفرض أن مقدر دالة الإمكان الأعظم(MLE)للمعلمة θ ، حيث أن $\mathrm{E}(\hat{\theta}_j)=\theta$ هو :

$$\hat{\theta}_j=\frac{\sum_{i=1}^{n_j}X_{ji}}{n_j}$$

حيث $j=1,2$ و $\mathrm{var}(\hat{\theta}_j)=\frac{\theta^2}{n_j}$ وعليه فان الاحصاءة $\frac{2n_j\hat{\theta}_j}{n_j}$ تتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية $2n_j$ [انظر١٢].

إن معادلة التحيز($Bias$)ويرمز لها(B) للمقدر $\widetilde{R}(t)$ المعرف في العلاقة(٥)تعطى بالشكل التالي :

$$B(\widetilde{R}(t)\mid R(t),R)=\mathrm{E}(\widetilde{R}(t)-R(t))$$

$$=e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}}\Bigg\{e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)}\left(\chi^2(2n_1,\bar{b})-\chi^2(2n_1,\bar{a})\right).\left(\chi^2(2n_2,\bar{b})-\chi^2(2n_2,\bar{a})\right)+$$

$$\left[\frac{2}{(n_1-1)!}\left(\frac{n}{K}\right)^{\frac{n_1-1}{2}}\left(\frac{t^\alpha}{\theta}\right)^{\frac{n_1-1}{\theta}}\frac{2}{(n_2-1)!}\left(\frac{n}{K}\right)^{\frac{n_2-1}{2}}\left(\frac{t^\alpha}{\theta}\right)^{\frac{n_2-1}{2}}\right]$$

$$\left[K_{n_1-1}\left(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}}\right)K_{n_2-1}\left(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}}\right)-\overline{K}_{n_1-1}\left(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}}\right)\overline{K}_{n_2-1}\left(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}}\right)\right]-1\Bigg\}\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

وإن معادلة متوسط مربعات الخطأ للمقدار $\widetilde{R}(t)$ تُعرف كما يلي :

$$MSE(\widetilde{R}(t)/R(t),R)=\mathrm{E}(\widetilde{R}(t)-R(t))^2$$

وبعد إجراء التبسيطات نحصل على : $MSE(\widetilde{R}(t)/R(t),R)$

$$= e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}\left\{ e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)} - 2e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}(\frac{1}{\lambda}-1)}\left(\chi^2(2n_1,\bar{b})-\chi^2(2n_1,\bar{a})\right)\left(\chi^2(2n_2,\bar{b})-\chi^2(2n_2,\bar{a})\right)+\right.}$$

$$2e^{\frac{2t^\alpha}{\theta}}\left[\frac{2}{(n_1-1)!}(\frac{n}{K})^{\frac{n_1-1}{2}}(\frac{t^\alpha}{\theta})^{\frac{n_1-1}{\theta}}\frac{2}{(n_2-1)!}(\frac{n}{K})^{\frac{n_2-1}{2}}(\frac{t^\alpha}{\theta})^{\frac{n_2-1}{2}}\right].$$

$$\left(\left[K_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})K_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})-\overline{K}_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})\overline{K}_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})\right]\right)-$$

$$2e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}}\left(\left[(\frac{1}{2})^{\frac{n_1-1}{2}}(\frac{1}{2})^{\frac{n_2-1}{2}}\right]\left[K_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})K_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})-\right]\right)-$$

$$\left(\left[\overline{K}_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})\overline{K}_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^\alpha}{\theta K}})\right]\right)+1\Big\}\text{.............................}(7)$$

وان $\lambda=\dfrac{\theta_\circ}{\theta}$.

كما أن معادلة الكفاءة النسبية(Relative Efficiency)والتي نرمز لها بالرمز(EF) للمقدر $\widetilde{R}(t)$ تكون كما يلي :

$$EF(\widetilde{R}(t)/R(t),R)=\frac{MSE(R(t)/R)}{MSE(\widetilde{R}(t)/R(t),R)}$$

$$e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}\left\{ e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}(\frac{2}{(n_1-1)})(2n)^{\frac{(n_1-1)}{2}}(\frac{t^\alpha}{\theta})^{\frac{(n_1-1)}{2}}\left[K_{n_1-1}(2\sqrt{2nt^\alpha/\theta})-2e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}}(\frac{1}{2})^{\frac{(n_1-1)}{2}}K_{n_1-1}(2\sqrt{2nt^\alpha/\theta})+1\right]}\right\}}/$$

$$e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}\left\{ e^{-\frac{2t^\alpha}{\theta}\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)} - 2e^{-\frac{t^\alpha}{\theta}(\frac{1}{\lambda}-1)}\left(\chi^2(2n_1,\bar{b})-\chi^2(2n_1,\bar{a})\right)\left(\chi^2(2n_2,\bar{b})-\chi^2(2n_2,\bar{a})\right)+\right.}$$

$$2e^{\frac{2t^\alpha}{\theta}}\left[\frac{2}{(n_1-1)!}(\frac{n}{K})^{\frac{n_1-1}{2}}(\frac{t^\alpha}{\theta})^{\frac{n_1-1}{\theta}}\frac{2}{(n_2-1)!}(\frac{n}{K})^{\frac{n_2-1}{2}}(\frac{t^\alpha}{\theta})^{\frac{n_2-1}{2}}\right].$$

$$\left(\left[K_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})K_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})-\overline{K}_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})\overline{K}_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})\right]\right)-$$

$$2e^{-\frac{t^{\alpha}}{\theta}}\left(\left[(\frac{1}{2})^{\frac{n_1-1}{2}}(\frac{1}{2})^{\frac{n_2-1}{2}}\right]\left[K_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})K_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})-\right]\right)-$$

$$\left(\left[\overline{K}_{n_1-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})\overline{K}_{n_2-1}(2\sqrt{\frac{nt^{\alpha}}{\theta K}})\right]\right)+1\Bigg\}\text{................}(8)$$

حيث أن :

$$\int_{\bar{a}}^{b} f_{2n_1}(\chi^2)d\chi^2 = \int_{0}^{b} f_{2n_1}(\chi^2)d\chi^2 - \int_{0}^{\bar{a}} f_{2n_1}(\chi^2)d\chi^2$$

$$=\chi^2(2n_1,\bar{b})-\chi^2(2n_1,\bar{a})\text{..................................}(9)$$

$$\bar{a}=\lambda\left[\chi^2{}_{1-\alpha}/2,2n_1\right] \quad ، \quad \bar{b}=\lambda\left[\chi^2{}_{\alpha}/2,2n_1\right]$$

وان $K_{n_1-1}(.)$ هي دالة بيزل (Bessel Function)من الرتبة n_1 وتكون كالآتي :

$$K_{n_1-1}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{(n_1-1)+2n}}{2^{(n_1-1)+1} r!(n_1-1)+n)!}\text{................}(10)$$

وان $\overline{K}_{n_1-1}(.)$ هي دالة شبيه بدالة بيزل المعدلة باختلاف الحدود من $\bar{a}$ إلى $\bar{b}$ بدلا من 0 إلى ∞ .

٣- المقدر المقترح $\widetilde{R}_1(t)$ باستخدام خطة العينة (n,B,r_1) :

لتكن $X_{1j},X_{2j},...,X_{r_1j}$ تمثل أوقات أول r_{1j} ضمن وحدات الفشل وان (n_j-r_1) من الوحدات تبقى حتى الوقت X_{r_1j} .وان مقدر الإمكان الأعظم(MLE) هو :

$$\hat{\theta}_j=T_{ij}/r_j,r_j\neq 0,T_{ij}=\sum_{i=1}^{n}X_{ij}+(n+r_1)X_{r1j}\text{............}(11)$$

حيث أن T_{ij} تمثل مجموع الوقت لبقاء n_1 من الوحدات التي تعمل بشكل جيد قبل انتهاء مدة الاختبار، وان $\mathrm{var}(\hat{\theta}_j/\theta)=\theta^2/r_j$ ، $\mathrm{E}(\hat{\theta}_1)=\theta$ وان الأحصاءة $2r_{1j}\hat{\theta}_{1j}/\theta$ تتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية $2r_{1j}$ (انظر 10و4).وبهذا تكون جميع النتائج التي حصلنا عليها في المبحث السابق متحققة هنا بعد تعويض r_i بدلا من n_j في جميع العلاقات الرياضية.

٤- المقدر المقترح $\widetilde{R}_2(t)$ باستخدام خطة العينة (n,B,r_2) :

في هذه العينة توضع n من الوحدات التي تتوزع توزيع ويبل بوسط مقداره θ للاختبار بشكل

مستقل وكل وحدة تفشل لا تُستبدل بوحدة جديدة وان الاختبار سيستمر حتى r_2 من وحدات الفشل.

لتكن $X_{r1}, X_{r2}, \dots, X_n$ تمثل أوقات الفشل لآخر r_2 من وحدات الفشل (أنظر١٠).

إن مقدر الإمكان الأعظم هو :

$$\hat{\theta}_{2j} = \frac{1}{n}\left[((n - r_2 + 1)B_{n_j - r_{2j}+1, n_j - r_{2j}+1})X_{(n_j - r_2 + 1)} + \sum_{i=n-r_2+1}^{n} x_i\right] \quad ...(12)$$

حيث أن $j = 1,2$.

وان
$$B_{n_j - r_{2j}+1} = \left[\sum_{i=1}^{n_j - r_{2j}+1} \frac{1}{(n_j - i + 1)}\right] \quad ....(13)$$

إن الأحصاءة $2r_{2j}\hat{\theta}_{2j} / \theta$ لها على الأكثر توزيع مربع كاي بدرجة حرية $2r_{2j}$ لذلك عند تعويض $\hat{\theta}_{2j}$ في المعادلة(١٢) بدلا من $\hat{\theta}_j$ في المعادلة(٣) فان جميع النتائج المتحققة في المبحث(٢)تكون متحققة هنا بمجرد استبدال $2r_{1j}$ بـ $2r_{2j}$.

٥- المقدر المقترح $\widetilde{R}_3(t)$ باستخدام خطة العينة (n, B, r_1, r_2) :

في هذه الخطة هناك n_j من الوحدات المستقلة والمتشابهة والتي تتوزع ويبل ،توضع للاختبار وإن الاختبار يستمر حتى $r_{2j} - r_{1j} - 1$ من وحدات الفشل .لتكن $X_{r_{1j}}, X_{r_{1j+1}}, \dots, X_{r_{2j-1}}, X_{r_{2j}}$ حيث $1 \le r_1 \le r_2 \le n$ تمثل أوقات الفشل ،وأن مقدر الإمكان الأعظم هو :

$$\hat{\theta}_{3j} = \frac{1}{n_j}\left[(r_1 B_{r_1}, n_j + r_{1j} - n_j)X_{r_{1j}} + \sum_{i=r_1+1}^{r_2} x_i + (n_j - r_{2j} + 1)X_{r_{2j}}\right] \quad ....(14)$$

حيث أن $j = 1,2$.

إن الأحصاءة $2r_{2j}\hat{\theta}_{3j} / \theta$ لها توزيع مربع كاي بدرجة حرية $2r_{2j}$ لذلك عند تعويض المقدر $\hat{\theta}_{3j}$ في المعادلة (١٤) بدلا من $\hat{\theta}_j$ في المعادلة (٣) فان جميع النتائج المتحققة في المبحث(٢)تكون متحققة هنا بمجرد استبدال $2r_{1j}$ بـ $2r_{2j}$.

٦- المقدر المقترح $\widetilde{R}_4(t)$ باستخدام خطة العينة (n, C, r_3) :

في خطة العينة هذه هناك n_j من الوحدات المستقلة توضع للاختبار وان الاختبار سيستمر حتى r_{3j} من وحدات الفشل بشرط أن أي وحدة تفشل فأنها تُستبدل حالاً بوحدة جديدة مشابهة لها(انظر٤).إن مقدر الإمكان الأعظم هو :

$$\hat{\theta}_{4j}=\frac{nT_{2j}}{r_{3j}},T_{2j}=X_{1j}+\sum_{i=1}^{r_3-1}X_{ij+1}+X_{ij}\,...........(15)$$

وان $\text{var}(\hat{\theta}_{4j}/\theta)=\theta^2/r_{3j}$ ، $\text{E}(\hat{\theta}_{4j})=\theta$.

والأحصاءة $2r_{3j}\hat{\theta}_{4j}/\theta$ تتوزع توزيع مربع كاي بدرجة حرية $2r_{3j}$ وان مقدر اقل متوسط مربعات خطأ لـ θ هو: $\hat{\theta}_{4j}=nT_j/r_{j+1}+1$

حيث $B(\hat{\theta}_{4j}/\theta)=-\theta/(r_{3j}+1)$ و $\text{var}(\hat{\theta}_{4j}/\theta)=r_{3j}\theta^2/(r_{3j}+1)^2$ لذ عند تعويض المقدر $\hat{\theta}_{4j}$ في المعادلة (١٥) بدلا من $\hat{\theta}_j$ في المعادلة (٣) فان جميع النتائج للتحيز ومتوسط مربعات الخطأ والكفاءة النسبية المتحققة في المبحث(٢)تكون متحققة .

٧- الاستنتاجات العددية Numerical Results:

لقد دُرست معادلات التحيز والكفاءة النسبية لمقدر المعولية $\tilde{R}(t)$ من خلال الثوابت الآتية :

$\alpha=0.01,0.05,0.1,0.2$ ، $\lambda=0.1(0.1)2.0$ ، $K=0.1(0.1)1$ ،

$\frac{t}{\theta}=(\frac{1}{9})(\frac{1}{9})(\frac{18}{9})$ ، $n_i=6,8,10,12$

من خلال ملاحظة النتائج الخاصة بالكفاءة والتحيز للمقدر $\tilde{R}(t)$ المبينة في الجداول المرفقة (١،٢،٣،٤،٥،٦)نستنتج مايلي :

١. تَميز المقدر $\tilde{R}(t)$ بكفاءة نسبية أعلى من المقدرات الكلاسيكية عندما $\lambda\cong 1$ ثم تتناقص تلك الكفاءة كلما ابتعدنا عن ذلك الجوار.
٢. إن الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ تكون دالة متناقصة بالنسبة إلى α كما هو الحال في غالبية التقديرات.
٣. أعلى قيمة للكفاءة النسبية كانت عندما $\frac{t}{\theta}=\frac{3}{9}$ ، $\alpha=0.01$.
٤. إن مقدر التحيز دالة متزايدة بالنسبة لحجم العينة n_i عندما $\lambda\cong 1$ وتبين تلك الجداول بان نتائج البحث تكون معقولة في جوار $\theta_\circ$.
٥. إن مقارنة نتائج الكفاءة النسبية لهذا المقدر مع المقدرات الكلاسيكية يبين أفضلية المقدر المقترح من حيث تمتعه بكفاءة نسبية عالية.

References

1. AL-Hemyari,Z.A.Sometimes Pool Estimators of the Life for Time Censored Data,No.1-14,J.Diala College.(1999).
2. Al-Hemyari,Z.A & Moudhi,J.A,Two Stage Pooli- ng Reliability Function Pretistimator of Exponential Distribution,J.AL-Moustansria.(2005).

3. Al-Hemyari,Z.A & Moudhi,J.A,Reliability Function Pretistmators of Exponential Distribution Using Type 1 and 2 Censored sample,J. Babylon No.3(2004).
4.Gnedenko.B.V.Belyayv,Ku.K.&Solovyev,A.D,Mathe-ematical Methods of Reliability Theory, Academic Press.(1969).
5. Handa,B.R.,Kambo,N.S.and AL-Hemyari,Z.A.On Double Stage Shrunken Estimator For The Mean Of Exponential Distribution.IAPQR,Trans.,13.(1988).
6. Khan,S.P.and Mond.Y.,Bayesian Estimation of Location and Scale Parameters and Reliability Function Using Censored Sample From Exponential Distribution.IAPQR.Trans.Vol.8,No.1,January (1983)
7. Lingappaiah,G.S.,Bayesian Approach to the Estimation of Reliability From Complete and Censored Sample on the Exponential Population.J.of the Industrial Math.Societyo V.28,Part 2,(1978).
8.Pandey,M.and Upadhyay.S.K.Bayesian Shrinkage Estimation of Reliability From Censored Sample with Exponential Failure Mode. South African Statist J.(1985).
9. Ranganathan J.and Kale,B.K.,Test of Hypotheses for Reliability Function in Two Parameter Exponential Mode.The Canadian Journal of Statistics Vol.7,No.2,(1979).
10. Sarhan A.E.and Greenberg,B.G.Contribution to Order Statistics ,Wiley.(1962).
11. Shewhart W.A.Economic Control of Quality of Manufactured Product. New York ,Vannostr and Co.,Inc.(1931).
12.Sinha S.K.,Reliability and Life Testing.Wiley East-ern Limited.(1986).
13.Sinha S.K.and Guttman I.,Bayesian Inference about the Reliability Function for the Exponential Distribution.Commun. Statisr-theor.Math.(1976).
14.Thompson,J.R,Some Shrinkage Techniquues For Estimating The Mean,J.Amer.Statist.Assoc.,63.(1986)

ملحق الجداول

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.301	.302	.304	.319	.346	.363	.359	.345	.334	.330
8	.946	.946	.950	.984	1.083	1.184	1.179	1.103	1.036	1.0
10	.997	.997	.998	1.021	1.122	1.283	1.323	1.215	1.106	1.0
12	.999	.999	1.000	1.013	1.100	1.299	1.415	1.294	1.138	1.0

جدول (1)يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ عندما $\alpha = 0.01, K = 0.1, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.301	.301	.302	.308	.324	.346	.393	.363	.352	.340
8	.946	.946	.947	.957	1.003	1.095	1.183	1.194	1.134	1.0
10	.997	.997	.997	1.003	1.041	1.148	1.288	1.333	1.251	1.1
12	.999	.999	.999	1.002	1.030	1.134	1.317	1.420	1.327	1.1

جدول (2) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ عندما $\alpha = 0.05, K = 0.1, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.999	.999	1.001	1.011	1.047	1.110	1.176	1.207	1.194	1.100
8	.999	1.000	1.000	1.005	1.035	1.106	1.203	1.262	1.242	1.100
10	1.000	1.000	1.000	1.002	1.023	1.094	1.219	1.322	1.310	1.200
12	1.000	1.000	1.001	1.013	1.015	1.078	1.221	1.378	1.392	1.200

جدول (3) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ عندما $\alpha = 0.01, K = 0.3, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.973	.973	.974	.976	1.995	1.034	1.089	1.137	1.155	1.100
8	.999	.999	.999	1.001	1.013	1.054	1.126	1.202	1.234	1.200
10	.999	.999	.999	1.000	1.009	1.045	1.127	1.235	1.293	1.200
12	.999	.999	1.000	1.000	1.005	1.035	1.121	1.259	1.355	1.300

جدول (4) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ عندما $\alpha = 0.02, K = 0.1, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.717	.717	.713	.689	.646	.617	.617	.635	.65	.653
8	.717	.717	.716	.698	.647	.598	.593	.623	.657	.678
10	.717	.717	.717	.706	.655	.584	.561	.598	.649	.683
12	.717	.717	.717	.711	.666	.579	.541	.566	.633	.691

جدول (5) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $R(t)$ عندما $\alpha = 0.01, K = 0.1, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$

$n \backslash \lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
6	.895	.895	.836	.845	.783	.748	.757	.786	.808	.815
8	.895	.895	.892	.861	.786	.722	.724	.771	.819	.846
10	.895	.895	.894	.875	.798	.703	.682	.738	.809	.853
12	.895	.895	.895	.834	.816	.696	.640	.696	.783	.850

جدول (6) يبين الكفاءة النسبية للمقدر $\tilde{R}(t)$ عندما $\alpha = 0.01, K = 0.1, / = /, \lambda = 0.1(0.1)1.0$