مرشـــح كالمـــــن لنمـــوذج حركي هرمي

(Kalman Filter of Dynamic Hierarchical Model)

د. سلطان علي محمد سالم

قسم الرياضيات، كلية التربية، جامعة الحديدة ، الجمهورية اليمنية

الخلاصة

في هذا البحث تم تحديد النموذج قيد الدراسة وهو نموذج حركي هرمي ، وبأسلوب رياضي تم اشتقاق الصيغة النهائية لمرشح كالمن للنموذج المحدد ، مع تحديد معامل الترشيح ، والمعادلات اللازمة لعملية الترشيح وضحت ، وقدم مثال يوضح شكل النموذج المعني بعملية الترشيح والذي من مكوناته يمكن إعداد برنامج حاسوبي وفقا للعلاقات الرياضية التي تم اشتقاقها . كما تم تحديد الحقول التي يمكن دراستها في هذا المجال .

1 ـ تمهيد : Preface

هناك ثلاثة اساليب وردت عن الاستدلال حول المعلمة والتي تكون مجهولة حيث بينها لاول مرة الباحث (Kalman . 1960) وتعطي قيم التقديرات (θ_s) وهي الترشيح و التنبؤ و التمهيد معتمدا على البيانات المعطاة لحد الزمن t .

وعندما تكون s = t فالحالة تعرف بالترشيح (Filtering) وفيها يكون الهدف ايجاد قيمة :

$$p(\theta_t \setminus y_1, y_2, \ldots, y_t)$$

قبل البدء نستعرض خلاصة لما ورد من بحوث تم الاطلاع عليها وتعد ذات صلة بموضوع هذا البحث .

الباحث (Johnson , 1992) اقترح تقنية ، اطلق عليها التكامل المتجانس (Quintile Integration) بالنسبة لتقدير كثافات لاحقة (Posterior) جديدة متكونة من نماذج بيز ، التي تمتلك شكل النموذج الهرمي (Hierarchical) ، واورد تطبيقات تتضمن نموذج بيز الهرمي التجريبي (Hierarchical Empirical Bayes Model) لمعدلات بواسون والنماذج الخطية الهرمية مع معلمات انحدار قابلة للتبديل

ومركبات تباين مجهول . وهناك دراسة حول النماذج المختلطة الهيكلية الهرمية (Hierarchically Structured Mixture Models) قام بها الباحث (West , 1997) .

في هذا البحث سوف نقوم باشتقاق صيغة رياضية لحساب مرشح كالمن لنموذج حركي هرمي . وهذة الصيغة تمثل اجراء تكراري لتقدير معلمات النموذج المعنى ، وتعمل على اقلال الخطأ المرافق للنموذج حصولا على المقدر الامثل للمعلمات ، ومعامل كالمن هو أفضل مرشح لاي توزيع احتمالي مقدراتة تتوزع توزيعا طبيعيا حيث يعطي اقل تباين للتقدير ، بناء على ما ورد من قبل (Melsa , and Cohn 1978) .

2 ـ تحديد النموذج / Model Specification

يتالف النموذج الحركي الخطي الهرمي المعنى في هذا البحث من ثلاث معادلات ، الاولى معادلة المشاهدة و الثانية معادلة البنية و الثالثة معادلة النظام ، ويعبر عنة كما يلي :

$$y_t = F_{1t}\theta_{1t} + \nu_{1t} \quad , \quad \nu_{1t} \sim N(0, V_{1t})$$

$$\theta_{1t} = F_{2t}\theta_{2t} + \nu_{2t} \quad , \quad \nu_{2t} \sim N(0, V_{2t})$$

$$\theta_{2t} = G_t\theta_{2,t-1} + w_t \quad , \quad w_t \sim N(0, W_t)$$

علما بأن جميع الاخطاء العشوائية مستقلة عن بعضها البعض بمصفوفات تباين معلومة ، ودليل الزمن $t=1,2,\ldots,n$ (Gamerman and Migon 1993) وأن :

y_t : متجة المشاهدات للنموذج ذو بعد (n x 1) المأخوذة عند الزمن t .

F_{1t} : مصفوفة معلومة عند الزمن t ذو بعد (n x n) .

F_{2t} : مصفوفة معلومة عند الزمن t ذو بعد (n x r) .

θ_{1t} : متجة معلمات النموذج عند الزمن t ذو بعد (n x 1) ويسمى ايضا بمتجة الحالة ويكون غير معلوم بالضبط .

θ_{2t} : متجة معلمات نموذج البنية عند الزمن t ذو بعد (r x 1) .

G_t : مصفوفة النظام ذو بعد (r x r) وتكون معلومة عند الزمن t .

v_{1t} : متجة خطا المشاهدة عند الزمن t ذو بعد (n x 1) ويتوزع طبيعيا بوسط صفر و مصفوفة تباين V_{1t} نفترض انها معلومة عند الزمن t .

v_{2t} : متجة خطا البنية عند الزمن t ذو بعد (n x 1) ويتوزع طبيعيا بوسط صفر ومصفوفة

تباين V_{2t} نفرض انها معلومة عند الزمن t .

w_t : متجة خطا النظام عند الزمن t ذو بعد (r x 1) ويتوزع طبيعيا بوسط صفر ومصفوفة

تباين W_t نفرض انها معلومة عند الزمن t .

معادلة المشاهدة تبين اعتماد مشاهدات النموذج على المعلمات غير المعلومة للنموذج ، وتبين معادلة البنية بنية تسلسل المعلمات ، ومعادلة النظام تبين التطور الزمني لمتجة المعلمات . المقادير $\{F_{1t}, F_{2t}, G_t, V_{1t}, V_{2t}, W_t\}$ المؤشرة بدليل الزمن ممكن لها ان تتغير أو لا تتغير مع الزمن وانما عينت به بقصد العمومية ، وفي هذا البحث جميع هذة المقادير تمثل قيما ثابتة عند كل زمن t ، ويشار للنموذج عندئذ بالنموذج الحركي الهرمي الثابت .

3 ـ مرشح كالمن : Kalman Filter

من خلال المعادلات المثلة للنموذج في البند (2) و الوصف الاحصائي لبعض مكونات النموذج و المعلومات المؤشرة حولة ، يمكن التوصل الى صيغة مرشح كالمن وفقا للمبرهنة التالية :

مبرهنة :

لتكن معلوماتنا الاولية حول المعلمة θ_{20} أي عند الزمن t = o هي :

$$(\theta_{20} \setminus Do) \sim N(m_{20}, C_{20})$$

علما بأن $D_t = \{y_t, D_{t-1}\}$ تمثل المعلومات المتوافرة لغاية الزمن t .

وبالتالي معلوماتنا عند الزمن t-1 يمكن التعبير عنها كما يلي :

ـ التوزيع الاحتمالي للمعلمة $\theta_{2,t-1}$ بتوافر المعلومات D_{t-1} هو :

$$(\theta_{2,t-1} \setminus D_{t-1}) \sim N(m_{2,t-1}, C_{2,t-1})$$

حيث أن :

$$D_{t-1}=\left\{y^{t-1},\sigma^{2},\tau^{2},\begin{pmatrix}\sigma_{\mu}^{2} & 0\\ 0 & \sigma_{\delta}^{2}\end{pmatrix}\right\}$$

وعلى ضوء ذلك فان :

ـ التوزيع الاحتمالي الاولى (Prior) عند الزمن t هو :

1) بالنسبة للمعلمة θ_{2t} :

$$(\theta_{2t}\setminus D_{t-1})\sim N(a_{2t},R_{2t})$$

حيث أن :

$$a_{2t}=G_t m_{2,t-1}$$

$$R_{2t}=G_t C_{2,t-1}G_t^{\prime}+W_t$$

2) بالنسبة للمعلمة θ_{1t} :

$$(\theta_{1t}\setminus D_{t-1})\sim N(a_{1t},R_{1t})$$

حيث أن :

$$a_{1t}=F_{2t}a_{2t}$$

$$R_{1t}=F_{2t}R_{2t}F_{2t}^{\prime}+V_{2t}$$

- التوزيع الاحتمالي التنبؤي (Predictive Distribution) عند الزمن t هو :

$$(y_t\setminus D_{t-1})\sim N(f_t,Q_t)$$

حيث أن :

$$f_t=F_{1t}a_{1t}$$

$$Q_t=F_{1t}R_{1t}F_{1t}^{\prime}+V_{1t}$$

- التوزيع الاحتمالي اللاحق (Posterior) عند الزمن t بتوافر المعلومات $D_t=\{y_t,D_{t-1}\}$ هو :

1*) بالنسبة للمعلمة θ_{1t} :

$$(\theta_{1t}\setminus D_t)\sim N(m_{1t},C_{1t})$$

حيث أن :

$$m_{1t}=a_{1t}+k_t(y_t-f_t)$$
$$C_{1t}=R_{1t}-k_tF_{1t}R_{1t}$$ ،

علما بأن :

$$k_t=R_{1t}F'_{1t}Q_t^{-1}$$

يسمى k_t معامل كالمن (Kalman Factor) أو ربحية الترشيح (Filter Gain) والمعادلة التي تمثل m_{1t} تسمى بالمعادلة الترشيحية (Filtering Equation) .

2) بالنسبة للمعلمة θ_{2t} :

$$(\theta_{2t}\backslash D_t)\sim N(m_{1t},c_{1t})$$

حيث أن :

$$m_{2t}=a_{2t}+R_{2t}F'_{2t}F'_{1t}R_{1t}^{-1}(m_{1t}-a_{1t})$$

$$C_{2t}=R_{2t}-R_{2t}F'_{2t}F'_{1t}R_{1t}^{-1}(R_{1t}-C_{1t})R_{1t}^{-1}F_{1t}F_{2t}R_{2t}$$

البرهان :

لاثبات صحة التوزيع الاحتمالي اللاحق كما يلي :

التوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة θ_{1t} عند الزمن t وبمعلومية D_t ، يمكن الحصول علية باستخدام نظرية بيز كالاتي :

$$p(\theta_{1t}\backslash D_t)\alpha p(y_t\backslash\theta_{1t}).p(\theta_{1t}\backslash D_{t-1}) \qquad (1)$$

(2)

$$p(y_t\backslash\theta_{1t})\alpha EXP\left\{\frac{-1}{2}\left[\left(y_t-F_{1t}\theta_{1t}\right)V_{1t}^{-1}(y_t-F_{1t}\theta_{1t})\right]\right\}$$

(3)

$$p(\theta_{1t} \setminus D_{t-1}) \alpha Exp\left\{\frac{-1}{2}\left[(\theta_{1t} - a_{1t})' R_{1t}^{-1}(\theta_{1t} - a_{1t})\right]\right\}$$

من (2) ، (3) و التعويض في (1) نحصل على :

(4)

$$p(\theta_{1t} \setminus D_t) \alpha EXP\left\{\frac{-1}{2}\left[(y_t - F_{1t}\theta_{1t})' V_{1t}^{-1}(y_t - F_{1t}\theta_{1t}) + (\theta_{1t} - a_{1t})' R_{1t}^{-1}(\theta_{1t} - a_{1t})\right]\right\}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي و الضرب في (2-) لطرفي الصيغة (4) نحصل على :

$$-2Lnp(\theta_{1t} \setminus D_t) \alpha (y_t - F_{1t}\theta_{1t})' V_{1t}^{-1}(y_t - F_{1t}\theta_{1t}) + (\theta_{1t} - a_{1t})' R_{1t}^{-1}(\theta_{1t} - a_{1t})$$

$$\alpha (y_t' - \theta_{1t}' F_{1t}') V_{1t}^{-1}(y_t - F_{1t}\theta_{1t}) + (\theta_{1t}' - a_{1t}') R_{1t}^{-1}(\theta_{1t} - a_{1t})$$

$$\alpha\, y_t' V_{1t}^{-1} y_t - y_t' V_{1t}^{-1} F_{1t}\theta_{1t} - \theta_{1t}' F_{1t}' V_{1t}^{-1} y_t + \theta_{1t}' F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t}\theta_{1t}$$
$$+ \theta_{1t}' R_{1t}^{-1}\theta_{1t} - \theta_{1t}' R_{1t}^{-1} a_{1t} - a_{1t}' R_{1t}^{-1}\theta_{1t} + a_{1t}' R_{1t}^{-1} a_{1t}$$

(5)

$$= h + \theta_{1t}'\left(R_{1t}^{-1} + F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t}\right)\theta_{1t} - 2\theta_{1t}'\left(R_{1t}^{-1} a_{1t} + F_{1t}' V_{1t}^{-1} y_t\right)$$

حيث h ثابت التناسب ويظم جميع المقادير الثابتة التي لا تحتوي على θ_{1t} .

ويمكن اشتقاق صيغة مكافئة للمقدار الاول في المعادلة (5) كما يلي :

$$R_{1t}^{-1} + F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t} = (R_{1t}^{-1} + F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t})(R_{1t} - R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t})$$
$$\cdot (R_{1t} - R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t})^{-1}$$

$$= \left[I - F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t} + F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t} R_{1t} - F_{1t}' V_{1t}^{-1} F_{1t} R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t}\right]$$

$$\left[R_{1t} - R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t}\right]^{-1}$$

$$=\left[I+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}R_{1t}-(V_{1t}+F_{1t}R_{1t}F_{1t}')V_{1t}^{-1}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]$$
$$\left[R_{1t}-R_{1t}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]^{-1}$$

$$=\left[I+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}R_{1t}-Q_tV_{1t}^{-1}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]$$
$$\left[R_{1t}-R_{1t}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]^{-1}$$

$$\left[R_{1t}-R_{1t}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]^{-1}$$
$$=\left[I+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}R_{1t}-F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}R_{1t}\right]$$

$$=\left(R_{1t}-R_{1t}F_{1t}'Q_t^{-1}F_{1t}R_{1t}\right)^{-1}$$

$$=C_{1t}^{-1} \qquad (6)$$

كما يمكن اشتقاق صيغة مكافئة للمقدار الثاني في المعادلة (5) كما يلي :

$$R_{1t}^{-1}a_{1t}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}y_t=R_{1t}^{-1}a_{1t}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}y_t+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}a_{1t}-F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}a_{1t}$$

$$=\left[R_{1t}^{-1}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}\right]a_{1t}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}\left(y_t-F_{1t}a_{1t}\right)$$

$$\left[a_{1t}+(R_{1t}^{-1}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t})^{-1}F_{1t}'V_{1t}^{-1}(y_t-f_t)\right]$$
$$=\left(R_{1t}^{-1}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}\right)$$
$$\left[a_{1t}+\left(R_{1t}^{-1}+F_{1t}'V_{1t}^{-1}F_{1t}\right)^{-1}F_{1t}'V_{1t}^{-1}Q_tQ_t^{-1}(y_t-f_t)\right]$$

$$=[R_{1t}^{-1}+F_{1t}^{/}V_{1t}^{-1}F_{1t}]$$

$$=C_{1t}^{-1}\left[a_{1t}+\left(R_{1t}^{-1}+F_{1t}^{/}V_{1t}^{-1}F_{1t}\right)^{-1}F_{1t}^{/}V_{1t}^{-1}\left(V_{1t}+F_{1t}R_{1t}F_{1T}^{/}\right)Q_{t}^{-1}(y_{t}-f_{t})\right]$$

$$=C_{1t}^{-1}\left[a_{1t}+(R_{1t}^{-1}+F_{1t}^{/}V_{1t}^{-1}F_{1t})^{-1}(R_{1t}^{-1}+F_{1t}^{/}V_{1t}^{-1}F_{1t})R_{1t}F_{1t}^{/}Q_{t}^{-1}(y_{t}-f_{t})\right]$$

$$=C_{1t}^{-1}\left[a_{1t}+R_{1t}F_{1t}^{/}Q_{t}^{-1}(y_{t}-f_{t})\right]$$

$$=C_{1t}^{-1}m_{1t} \qquad (7)$$

وبالتالي من المعادلة (6) و المعادلة (7) و التعويض في (5) نحصل على :

$$-2Lnp(\theta_{1t}\setminus D_{1})=h+\theta_{1t}^{/}C_{1t}^{-1}\theta_{1t}-2\theta_{1t}^{/}C_{1t}^{-1}m_{1t}$$

$$=h+(\theta_{1t}-m_{1t})^{/}C_{1t}^{-1}(\theta_{1t}-m_{1t})$$

وذلك باضافة وطرح الكمية الثابتة $(m_{1t}C_{1t}^{-1}m_{1t}^{/})$ ثم التحليل ودمج الكمية الثابتة مع الثابت h وعلية فأن :

$$P(\theta_{1t}\setminus D_{t})\alpha EXP\left\{\frac{-1}{2}\left[(\theta_{1t}-m_{1t})^{/}C_{1t}^{-1}(\theta_{1t}-m_{1t})\right]\right\}$$

أي أن :

$$(\theta_{1t}\setminus D_{t})\sim N(m_{1t},C_{1t})$$

حيث أعتبرنا في المعادلة (7) و المعادلة (6) أن :

$$(8)$$

$$m_{1t}=a_{1t}+R_{1t}F_{1t}^{/}Q_{t}^{-1}(y_{t}-f_{t})$$

$$C_{1t}=R_{1t}-R_{1t}F_{1t}^{/}Q_{t}^{-1}F_{1t}R_{1t}$$

المعادلة (8) تمثل مرشح كالمن وتسمى بالمعادلة الترشيحية ومعامل كالمن هو :

$$k_t = R_{1t} F_{1t}' Q_t^{-1}$$

كما يمكن اثبات صحة التوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة θ_{2t} كما يلي :

- التباين المشترك بين θ_{1t} ، θ_{2t} بمعلومية D_{t-1} هو :

$$\begin{aligned} Cov(\theta_{1t}, \theta_{2t} \setminus D_{t-1}) &= Cov\left[(F_{1t} F_{2t} \theta_{2t} + F_{1t} V_{2t} + V_{1t}), \theta_{2t} \setminus D_{t-1}\right] \\ &= F_{1t} F_{2t} Cov(\theta_{2t}, \theta_{2t}) + o \\ &= F_{1t} F_{2t} Var(\theta_{2t} \setminus D_{t-1}) \\ &= F_{1t} F_{2t} R_{2t} \\ &= R_{2t} F_{2t}' F_{1t}' \end{aligned}$$

وبالاعتماد على العلاقات الواردة في كتاب (Johnson and Wichern 1988) نجد أن :

$$\begin{pmatrix} \theta_{2t} \\ \theta_{1t} \end{pmatrix} \setminus D_{t-1} \sim N\left\{ \begin{pmatrix} a_{2t} \\ a_{1t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R_{2t} & R_{2t} F_{2t}' F_{1t}' \\ F_{1t} F_{2t} R_{2t} & R_{1t} \end{pmatrix} \right\}$$

من هذه الصيغة نحصل على :

$$E(\theta_{2t} \setminus \theta_{1t}, D_{t-1}) = a_{2t} + R_{2t} F_{2t}' F_{1t}' R_{1t}^{-1} (\theta_{1t} - a_{1t})$$

$$Var(\theta_{2t} \setminus \theta_{1t}, D_{t-1}) = R_{2t} - R_{2t} F_{2t}' F_{1t}' R_{1t}^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t}$$

وبالتالي التوزيع الاحتمالي اللاحق للمعلمة θ_{2t} بمعلومية D_t نحصل علية باستخدام العلاقات الواردة من قبل (Kass and Steffey 1989) والتي يتم استخدامها غالبا في موضوع تحليل بيز الخطي وكما يلي :

$$E(\theta_{2t} \backslash D_t) = E\left[E(\theta_{2t} \backslash \theta_{1t}, D_{t-1}) \backslash D_t\right]$$
$$= E\left[a_{2t} + R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} (\theta_{1t} - a_{1t})\right]$$
$$= a_{2t} + R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} (m_{1t} - a_{1t})$$
$$= m_{2t}$$
$$Var(\theta_{2t} \backslash D_t) = Var\left[E(\theta_{2t} \backslash \theta_{1t}, D_{t-1}) \backslash D_t\right] + E\left[Var(\theta_{2t} \backslash \theta_{1t}, D_{t-1}) \backslash D_t\right]$$

$$= Var\left[a_{2t} + R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} (\theta_{1t} - a_{1t})\right]$$
$$+ E\left[R_{2t} - R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t}\right]$$
$$= (R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1}) C_{1t} \left(R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1}\right)'$$
$$+ R_{2t} - R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t}$$
$$= R_{2t} - R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} (F_{1t} F_{2t} R_{2t} - C_{1t} R_{1t}^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t})$$
$$= R_{2t} - R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} R_{1t}^{-1} (R_{1t} - C_{1t}) R_{1t}^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t}$$
$$= C_{2t}$$

أي أن :

$$(\theta_{2t} \backslash D_t) \sim N(m_{2t}, C_{2t})$$

هذا يعد توضيح للعلاقة بين مراحل التسلسل ، ومن خلال ما سبق نلاحظ أن أحصاء بيز قد زودنا بصورة جذابة ورصينة بنتائج تمكننا من عملية الاستدلال و التعرف حول المعلمة θ_{1t} و المعلمة θ_{2t} من خلال توزيع إحتمالي ، وصيغة هذه المبرهنة أخذت بتصرف من بحث (Gamerman and Migon 1993) ، وقمنا في هذا البحث ببرهنتها وفقا للصيغة الواردة بها .

مثال : Example

ليكن لدينا نموذج صيغتة الرياضية بالشكل الاتي :

معالة : $$y_t \backslash B_t \sim N(B_t, \sigma^2) \qquad , t = 1,2,\ldots,n$$

المشاهدة

$$B_t \backslash \mu_t \sim N(\mu_t, \tau^2)$$: معادلة البنية

: $$\left.\begin{array}{c} \mu_t = \mu_{t-1} + \delta_{t-1} + w_{1t} \\ \delta_t = \delta_{t-1} + w_{2t} \end{array}\right\} \qquad where : w_t = \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix} \sim N(0, W_t)$$

معادلة النظام

هذا النموذج يمثل نموذج حركي ذو مراتب متسلسلة ، ويمكن كتابتة بالصيغة العامة كما يلي :

$$\begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ \vdots \\ V_{1n} \end{pmatrix} \sim N(0, \sigma^2 I_n)$$ ،

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ \vdots \\ V_{1n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix} \sim N(0, \tau^2 I_n)$$ ،

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ \vdots\ \vdots \\ 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_t \\ \delta_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{2n} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix} \sim N(0 W_t)$$

$$\begin{pmatrix} \mu_t \\ \delta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{t-1} \\ \delta_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix},$$

ويلاحظ في هذا النموذج ما يلي :

$$r = 2$$

$$F_{1t} = F_1 = I_n \quad ,$$

$$\theta_{1t} = (B_1, B_2, \dots, B_n)'$$

$$F_{2t} = F_2 = (1_n, O_n) \quad ,$$

$$\theta_{2t} = (\mu_t, \delta_t)'$$

$$V_{1t} = \sigma^2 I_n \quad , \quad V_{2t} = \tau^2 I_n$$

$$G_t = G = \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix} \quad , \quad W_t = \begin{pmatrix} \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix}$$

ومما سبق ، فأن هذا النموذج يوصف عن طريق المقادير :

$$\left\{ I_n, (1_n, o_n), \begin{pmatrix} 11 \\ 01 \end{pmatrix}, \sigma^2 I_n, \tau^2 I_n, \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\delta^2 \end{pmatrix} \right\}$$

عند كل قيمة للزمن t .

وبالتالي يمكن إجراء عملية الترشيح ببناء برنامج حاسوبي وفقا للخطوات الرياضية الواردة في البند (3) .

ويمكن تعميم هذا النموذج ليشمل مقطع عرضي لعينات عشوائية بمتوسطات تبديليه نامية خطية

(Cross – Section of Random Samples of Linear Growing Exchangeable Means)

ويكتب بالشكل التالي :

$$\left.\begin{array}{l} y_{ti} \sim N(B_{ti}, \sigma^2) \\ B_{ti} \sim N(\mu_t, \tau^2) \end{array}\right\} \quad \text{Independent for i=1,2,…,n}$$

Where

$$w_t = \begin{pmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix} \sim N/0, W_t)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_t = \mu_{t-1} + \delta_{t-1} + w_{1t} \\ \delta_t = \delta_{t-1} + w_{1t} \end{array}\right\}$$

ويلاحظ في هذا النموذج أن : $\theta_{1t} = (B_{t1}, B_{t2}, \dots, B_{tn})'$ وبقية المعلومات كما وردت في المثال .

5) ملاحظات ختامية Concluding Remarks :

النتائج التي تم اشتقاقها في هذا البحث تطبق بصوره عامة عندما تكون مصفوفات التباين معلومة ، وهذا في الغالب نادر الحدوث في التطبيقات العملية ، لذا يجب أن تتواقر مقاييس ملائمة في البيانات قيد الدراسة تسمح بتقدير التباين .

وفي هذا البحث ايضا الفرضية البسيطة المؤثرة في معرفة التباين اعتبرت كعامل عددي (Scalar) ، و البنية للنموذج في معظم التطبيقات تسمح بافتراض أن $V_{1t} = \sigma^2 I_n$ حيث n يمثل بعد y_t . التحليل المرافق يكون ممكنا اذا جميع التباينات $(C_{20}, W_t, V_{2t}, V_{1t})$ تم اعتبارها اعداد (Scalar) بواسطة σ^2 العامل المجهول ، ويمكن البحث في هذا الحقل في ثلاث مجالات هم :

تقدير التباين (Variance estimation) ، نماذج غير خطية(Non – Linear models) ، مشاهدات غير طبيعية (Non – normal observations) ، خلاصة ما سبق هي ان مسألة تقدير التباين العددي محور اهتمام ، بصورة عامة التباين المشاهد يدرس لتقديره . كما أن ألأسلوب المقترح للتطبيق يمكن استخدامه لمجموعة واحدة من البيانات أي أن i=1 ويمكن تعميمة لاكثر من مجموعة من البيانات .

((References))

1) Gamerman, D. and Migon,H.S. (1993) , " Dynamic hierarchical Models " , J.R. Statist . Soc . B, Vol . 55,No.3,pp.629 – 642 .

2) Johnson,V.E. (1992) , " A technique for estimation marginal posterior densities in hierarchical models using mixtures of conditional densities " , Journal of the American Statistical Association , Vol . 87 , No . 419 , pp. 852 – 860 .

3) Johnson , R . A . and Wichern , D. W . (1988) , " Applied multivariate statistical analysis " , Prentice _ Hall International , Inc .

4) Kalman , R.E. (1960) , " A New approach to linear filtering and problem " , Journal of Basic Engin , Vol . 82 , PP . 34 – 45 .

5) Kass , R . E . and Steffey, D . (1989) , " Approximate Bayesian inference in conditionally independent hierarchical models Parametric empirical Bayes models " , Journal of the American Statisoical Association , Vol . 84 , No – 407 , pp . 717 – 726 .

6) Melsa, J.L. and Cohn , D. l . (1978) , " Decision and estimation theory " , McGraw - Hil , Inc .

7) West , M . (1997) , " Hierarchical mixture models in Neurological transmission analysis " , Journal of the American Statistical Association , Vol . 92 , No . 438 , pp. 587 – 606 .