استخدام النماذج الهرمية الحركية في تقدير مركبة الاتجاه

Using of Dynamic Hierarchical Model In Estimation of Trend Compound

د. سلطان علي محمد سالم *

الخلاصة

في كثير من التطبيقات العملية ، تأتي البيانات مرتبطة مع الزمن كما هو الحال في البيانات الاقتصادية، تسمى مثل هذه البيانات سلاسل زمنية، أي إن السلسلة الزمنية هي مجموعة مشاهدات زمنية أخذت وفق ترتيب طبيعي. ومن أهم استعمالات السلاسل الزمنية التنبؤ عن المستقبل باستعمال البيانات الإحصائية المتوفرة عن الماضي، وقيم أي ظاهرة عبر الزمن تكون تحت تأثير عوامل اقتصادية واجتماعية وبيئية وتقع تحت تأثير أربعة أنواع من التغيرات وبدرجات متفاوتة. وهذه التغيرات يطلق عليها عناصر السلسلة الزمنية. والاتجاه العام **(Logterm Trend)** هو العنصر الذي يقصد به الحركة المنتظمة للسلسلة عبر فترة زمنية طويلة نسبيا ويعتبر في العادة أهم عناصر السلسلة الزمنية وغالبا ما يعتمد كعنصر وحيد في بناء التوقعات . ويمتاز بكون التغير الذي يطرأ عليه تدريجياً وليس مفاجأ وفي هذا البحث قمنا بتسخير النماذج الهرمية الحركية لحساب مركبة الاتجاه حيث قمنا بتصميم نموذج هرمي حركي خطي خصيصا لهذا الغرض وعملنا صياغة رياضية تلائم هذا النموذج يتم بواسطتها حساب التوزيعات الاحتمالية المختلقة حول المعلمة وحساب مركبة الاتجاه ومن اجل التأكيد على سلامة الأسلوب المقترح تم حساب مركبة الاتجاه والتنبؤ باستخدام نموذج خط انحدار ودونت النتائج بالجدول (2) ومن المقارنة بين النتائج في الجدول (2) والنتائج المحتسبة باستخدام النموذج الهرمي الحركي في الجدول(3) توصلنا إلى إن استخدام النماذج الهرمية الحركية لهذا الغرض تؤدي إلى الحصول على نتائج أفضل وبأقل خطأ كما إنها تبرز معلومات شاملة حول المعلمة وتعطي تنبؤ مستقبلي أدق.

* استاذ مساعد – قسم الرياضيات – كلية التربية – جامعة الحديدة .

1- المقدمة: Introduction

إن الأسلوب الشائع في تقدير مركبة الاتجاه والتنبؤ بتطور معظم الحالات تحت الدراسة هو أسلوب المربعات الصغرى الخطية ، ومن أهم عيوب هذا الأسلوب:

1. افتراض إن المعاملات ثابتة في تتبع الحالة المدروسة ، وهذا الثبات يؤدي إلى حالة عدم تشابه كبيرة ، ويؤدي إلى معدلات للبيانات المرفقة تظلل عند استخدامها في التنبؤ.
2. أسلوب التوفيق بالمربعات الصغرى لا يميز الطبيعة المتسلسلة للبيانات.
3. عند دراسة السلاسل الزمنية غالبا ما توجد علاقات بين السلاسل التي يمكن تكوينها داخل النموذج ولكن خارج المعادلة القياسية للانحدار . $y = x\beta + \in$

والأسلوب الذي سيتم وصفه في هذا البحث والذي يجتاز عيوب طريقة المربعات الصغرى الخطية ، هو استخدام النماذج الهرمية الحركية في عملية تقدير مركبة الاتجاه والتنبؤ ، وهذا الأسلوب يقدم معلومات اكثر شمولية حول المعلمة. والنمو الهرمي الحركي يوفر الشكل للتغير المتوقع للمعلمات وكذلك يوجه التنبؤ ، والصياغة العامة لهذه النماذج لاتزال غائبة ولم تبرز مقارنة بالنماذج الخطية وغير الخطية البسيطة والعامة(المتعددة).

يهدف البحث الى توفير معرفة بسيطة عن هذه النماذج وطريقة استخدامها في عمليات التقدير والتنبؤ. النموذج معطى في البند(2) مع دراسة استدلالية للتوزيعات الاحتمالية وتقدير مركبة الاتجاه قدمت بمثال البند (3) . والرموز و التسميات مأخوذة من(West and Harrison 1997).أخيرا للمقارنة وضع الجدول (2) والذي يعرض تقدير مركبة الاتجاه وكذلك التنبؤ عند X=11 ، باستخدام نموذج خطي بسيط، كما إن الجدول (3) يبرز كافة المعلومات حول المعلمة والتي تظهر بيسر عند استخدام النماذج الهرمية الحركية مما يؤدي إلي الحصول على نتائج افضل وبأقل خطأ وكذا تنبؤ مستقبلي أدق.

2- النموذج الهرمي الحركي: Dynamic Hierarchical Model

النموذج الهرمي الحركي مركب من ثلاثة أجزاء هي :

1- معادلة المشاهدة: The Observation Equation

وهذه المعادلات تصف المشاهدات.

2 - معادلات البنية : The Structural Equation

وهذه المعادلات تصف بنية تسلسل المعلمات.

3- معادلة النظام: The System Equation

وهذه المعادلة تصف شكل نمو المعلمات خلال الزمن.

هذا البناء من المعادلات يعمم النماذج المتسلسلة المقدمة من قبل(Lindeley and Smith 1972) وذلك عن طريق تغيير الزمن للمعلمات ، وكذلك يعمم النماذج الخطية الحركية التي تعود إلى (Harrison and Steven 1976) ويمكن اعتباره بنية معلميه محسنة. إن الصيغة الرياضية للنماذج الهرمية الحركية يمكن كتابتها بالشكل الآتي :

1- معادلة المشاهدة:

$$Y_t = F_{1t}\theta_{1t} + \gamma_{1t} \qquad , \gamma_{1t} \sim N\,(0, V_{1t}) \qquad (1)$$

2- معادلات البنية:

$$\theta_{1t} = F_{2t}\theta_{2t} + \gamma_{2t} \qquad , \gamma_{2t} \sim N\,(0, V_{2t}) \qquad (2\,a)$$

$$\theta_{2t} = F_{3t}\theta_{3t} + \gamma_{3t} \qquad , \gamma_{3t} \sim N\,(0, V_{3t}) \qquad (2\,b)$$

3- معادلة النظام :

$$\theta_{3t} = G_t\theta_{3,\,t-1} + w_t \qquad , w_t \sim N\,(0, W_t) \qquad (3)$$

جميع الأخطاء العشوائية γ_{1t} , γ_{2t} , γ_{3t} , w_t مستقلة بعضها عن البعض الآخر بمصفوفات تباين معلومة، وكذلك F_{1t} , F_{2t} , F_{3t} مصفوفات معلومة و G_t مصفوفة معلومة أيضا تسمى مصفوفة النظام. والنموذج أعلاه يشمل ثلاث مراحل في التسلسل المعلمي ،والنموذج الذي يشمل اكثر من ثلاث مراحل قلما يستـــخدم (Lindley and Smith 1972)

وفي الغالب النماذج الهرمية الحركية تكتب بمعادلة بنية واحدة وذلك بوضع $F_{3t} = I$ و $V_{3t} = 0$ حيث I مصفوفة الوحدة و 0 مصفوفة صفرية وهذه القيود توضع لأغراض توضيحية وعملية.

المعادلات من (1) – (3) تعطي عرض كفؤ ومفسر للنموذج ، ولكنها لم تصف النموذج بصورة كاملة والسبب في كونها لم توضح حوادث التكييف (الشروط) . ولكي يتم تلاشي هذا السبب يتم تعريف D_t والذي يمثل المعلومات التي تم الحصول عليها إلى حد الزمن t. وتظم المعلومات الأولية D_0 ، وقيم المشاهدات $y_1, y_2, ..., y_t$ ، وفي حالة افتراض أن

$$D_t = \{Y_t, D_{t-1}\}$$

نحصل على النتائج الآتية:

1- التوزيع الاحتمالي الأولى عند الزمن t=o

$$(\theta_{k,0} \setminus D_0) \sim N\,(m_{k,0}, C_{k,0}) \qquad (4)$$

2- التوزيع الاحتمالي الأولى عند الزمن t :

$$(\theta_{it} \setminus D_{t-1}) \sim N\,(a_{it}, R_{it}) \quad, i = 1,2,...,k \qquad (5)$$

حيث أن:

$$a_{it} = F_{i+1,t}\, a_{i+1,t} \qquad , R_{it} = F_{i+1,t} R_{i+1,t} F'_{i+1,t} + V_{i+1,t} \quad , i = 1,2,..,k-1$$
$$a_{kt} = G_t\, m_{k,t-i} \qquad , R_{kt} = G_t C_{k,t-1} G'_t + W_t$$

3-التوزيع الاحتمالي التنبؤي(خطوة واحدة إلى الأمام):

$$(Y_t \setminus D_{t-1}) \sim N\,(f_t, Q_t) \qquad (6)$$

حيث أن:

$$f_t = F_{1t}\, a_{1t} \qquad , \qquad Q_t = F_{1t} R_{1t} F'_{1t} + V_{1t}$$

4-التوزيعات الاحتمالية اللاحقة عند الزمن t :

$$(\theta_{it} \setminus D_t) \sim N\,(m_{it}, C_{it}) \,, \quad i = 1,2,....,k \qquad (7)$$

حيث أن:

$$m_{it} = a_{it} + S_{it} Q_t^{-1} (Y_t - f_t)$$

$$C_{it} = R_{it} - S_{it} Q_t^{-1} S_{it}'$$
$$S_{it} = R_{it} E_{0it}'$$

علما بان:

$$E_{ijt} = F_{i+1,t} \ldots\ldots F_{jt} \quad , \quad 0 \le i \angle j \le k$$

(Gamerman and Migon 1993)

5- مركبة الاتجاه: يمكننا الحصول على مركبة الاتجاه باستخدام العلاقات الآتية:

$$(\theta_{k,t+1} \setminus D_t) \sim N\ (a_{it}(1), R_{it}(1)) \qquad , \qquad i = 1,2,\ldots\ldots,k-1$$

$$a_{it}(1) = G_t a_{it}(0) \qquad , \qquad a_{it}(0) = m_{it}$$

$$R_{it}(1) = G_t R_{it}(0) G_t' + W_t \qquad , \qquad R_{it}(0) = C_{it}$$

وبالتالي فان :

$$(Y_{t+1} \setminus D_t) \sim N\ (f_t(1), Q_t(1)) \qquad (8)$$

حيث ان :

$$f_t(1) = F_{it} a_{it}$$
$$Q_t(1) = F_{it} R_{it} F_{it}' + V_{it}$$

وهذه النتائج تمكننا من العمليات الأساسية المتطلبة من قبل النموذج لأجل التنبؤ والتحديث.

(West and Harrison 1997)

3- تقدير مركبة الاتجاه Estimation of Trend Compound

يمكن تقدير مركبة الاتجاه عن طريق إيجاد خط الانحدار للبيانات المعطاة (الزمن ، المشاهدة) . ويمكن استعمال خط الانحدار الناتج للتنبؤ عن القيمة المستقبلية لهذه السلسلة على أن لا يكون الزمن بعيدا اكثر من نصف طول الفترة المعطاة.

مثال: الجدول (2) يوضح حساب مركبة الاتجاه لمتسلسلة زمنية معرفة في الجدول (1) التالي:

جـــدول(1)

السنة	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
القيمة المشاهدة	147	175	150	191	188	179	200	220	208	230

وعند إعطاء السنوات أرقاما تصاعدية ابتداء بالواحد الى آخر رقم وهو هنا 10 وتم تسمية هذا الترقيم X وقيم المشاهدات Y وتمثيل حسابات إيجاد خط انحدار Y على X نحصل على النتائج كما في الجدول (2) التالي:

جدول (2)

X	Y	XY	X^2	مركبة الاتجاه T
1	147	147	1	152.09
2	175	350	4	160.25
3	150	450	9	168.41
4	191	764	16	176.56
5	188	940	25	184.72
6	179	1074	36	192.88
7	200	1400	49	201.04
8	220	1760	64	209.19
9	208	1872	81	217.35
10	230	2300	100	225.51

باستخدام طريقة المربعات الصغرى تم الحصول على معادلة خط الانحدار الآتيه:

$$\hat{Y} = 143.933 + 8.158x$$

وتم استخدام خط الانحدار هذا في أيجاد مركبة الاتجاه لكل سنة من السنوات كما موضح في الجدول (2) ، ومن جهة أخرى يمكن استعمال معادلة خط الانحدار للتنبؤ عن القيم المستقبلية لهذه السلسلة، فمثلا تقدير القيمة عام 1980 أي عند x=11 هي $\hat{Y} = 233.667$. (أبو صالح وعوض (1990)

ولكن استخدام النماذج الخطية التي تعتمد على أسلوب المربعات الصغرى في التقدير والتنبؤ لها مشاكل عدة منها مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ ومشكلة

الارتباط الذاتي ومشكلة التعداد الخطي(الازدواجية) والتي تظهر بكثرة عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية ولمزيد من التفاصيل في هذا المضمار انظر (هادي والدليمي 1988).

في بحثنا هذا سوف نقوم باستخدام النماذج الهرمية الحركية في تقدير مركبة الاتجاه والتنبؤ لعام (1980) لبيانات المثال السابق ومقارنتها مع النتائج في الجدول(2) أعلاه التي تم استنتاجها بطريقة المربعات الصغرى الخطية.

ولتنفيذ هذا يمكن إعادة صياغة المعادلات من (1) إلى (3) كما يلي :

$$Y_t = F_{1t}\theta_{1t} + \gamma_{1t} \qquad , \quad \gamma_{1t} \sim N\,(0\,, V_{1t})$$

$$\theta_{1t} = F_{2t}\theta_{2t} + \gamma_{2t} \qquad , \quad \gamma_{2t} \sim N\,(0\,, V_{2t})$$

$$\theta_{2t} = G_t\theta_{2,t-1} + w_t \qquad , \quad w_t \sim N\,(0\,, W_t)$$

ومكونات هذا النموذج هي :

$$F_{1t} = F_1 = (1 \quad X) \qquad , \quad \theta_{1t} = \begin{pmatrix} \beta_{t1} \\ \beta_{t2} \end{pmatrix}$$

$$F_{2t} = F_2 = I \qquad , \quad \theta_{2t} = \begin{pmatrix} \mu_{t1} \\ \mu_{t2} \end{pmatrix}$$

$$G_t = G = I \qquad , \; V_{2t} = V_2 = W_t = W = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}$$

$$V_{1t} = \sigma^2 = V$$

وباستخدام المعادلات من (4) الى (8) وبوضع k=2 فان:

1- التوزيع الاحتمالي الاولي عند t=0 هو :

$$m_{2,t-1} = \begin{pmatrix} m_{21,t-1} \\ m_{22,t-1} \end{pmatrix} \quad , \quad C_{2,t-1} = \begin{pmatrix} c_{21,t-1} & 0 \\ 0 & c_{22,t-1} \end{pmatrix}$$

2- التوزيع الاحتمالي الاولي عند الزمن t هو:

$$a_{2t} = G_{m_{2,t-1}} = \begin{pmatrix} m_{21,t-1} \\ m_{22,t-1} \end{pmatrix}$$

$$R_{2t} = G\ C_{2,t-1} G' + W = \begin{pmatrix} r_{21,t} & 0 \\ 0 & r_{22,t} \end{pmatrix}$$

حيث أن:

$$r_{21,t} = C_{21,t-1} + V_1$$
$$r_{22,t} = C_{22,t-1} + V_2$$
$$a_{1t} = F_{2t} a_{2t} = \begin{pmatrix} m_{21,t-1} \\ m_{22,t-1} \end{pmatrix}$$
$$R_{1t} = F_{2t} R_{2t} F'_{2t} + V_{2t} = \begin{pmatrix} r_{11,t} & 0 \\ 0 & r_{12,t} \end{pmatrix}$$

حيث أن:

$$r_{11,t} = r_{21,t-1} + V_1$$
$$r_{12,t} = r_{22,t-1} + V_2$$

3- التوزيع الاحتمالي التنبؤي خطوة واحدة إلى الأمام هو:

$$f_t = F_{1t} a_{1t} = m_{21,t-1} + x\, m_{22,t-1}$$
$$Q_t = F_{1t} R_{1t} F'_{1t} + V_{1t} = r_{11,t} + x^2 r_{12,t} + V$$

4- التوزيع الاحتمالي اللاحق عند الزمن t هو:

$$m_{2t} = a_{2t} + R_{2t} F'_{2t} + F'_{1t} Q_t^{-1} (Y_t - f_t) = \begin{pmatrix} m_{21,t} \\ m_{22,t} \end{pmatrix}$$

حيث أن:

$$m_{21,t} = m_{21,t-1} + A_{21,t} (Y_t - f_t)$$
$$m_{22,t} = m_{22,t-1} + A_{22,t} (Y_t - f_t)$$

علما بأن:

$$A_{21,t} = \frac{r_{21,t}}{Q_t} \quad , \quad A_{22,t} = \frac{x\, r_{22,t}}{Q_t}$$

$$m_{1t} = a_{1t} + R_{1t} F'_{1t} Q_t^{-1} (Y_t - f_t) = \begin{pmatrix} m_{11,t} \\ m_{12,t} \end{pmatrix}$$

حيث أن:

$$m_{11,t} = m_{21,t-1} + A_{11,t}(Y_t - f_t)$$
$$m_{12,t} = m_{22,t-1} + A_{12,t}(Y_t - f_t)$$

علما بأن:

$$A_{11,t} = \frac{r_{11,t}}{Q_t} \quad , \quad A_{12,t} = \frac{x\, r_{12,t}}{Q_t}$$

$$C_{2t} = R_{2t} - R_{2t} F'_{2t} F'_{1t} Q_t^{-1} F_{1t} F_{2t} R_{2t} = \begin{pmatrix} C_{21,t} & 0 \\ 0 & C_{22,t} \end{pmatrix}$$

حيث أن:

$$C_{21,t} = r_{21,t}(1 - A_{21,t})$$
$$C_{22,t} = r_{22,t}(1 - x\, A_{22,t})$$
$$C_{1t} = R_{1t} - R_{1t} F'_{1t} Q_t^{-1} F_{1t} R_{1t} = \begin{pmatrix} C_{11,t} & 0 \\ 0 & C_{12,t} \end{pmatrix}$$
$$C_{11,t} = r_{11,t}(1 - A_{11,t})$$
$$C_{12,t} = r_{12,t}(1 - x\, A_{12,t})$$

5-تقدير مركبة الاتجاه:

$$f_t(1) = m_{11,t} + x\, m_{12,t} \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots\ldots,10$$
$$Q_t(1) = C_{11,t} + X^2 C_{12,t} + (V_1 + X^2 V_2 + V)$$

وببرمجة الخطوات السابقة الذكر في برنامج حاسوبي واختيار قيم التوزيع الاحتمالي الأولي عند t=0 ولتكن القيم المستحصلة بطريقة المربعات الصغرى وكالآتي:

$$\theta_{20} = m_{20} = \begin{pmatrix} 143.973 \\ 8.158 \end{pmatrix}$$

$$C_{20} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{pmatrix}$$

مع قيم التباينات الآتية :

$$V_2 = W = \begin{pmatrix} 71.14 & 0 \\ 0 & 1.848 \end{pmatrix}$$

$$V = 152.444$$

نحصل على التقديرات المطلوبة كما في الجدول(3).

جدول (3):

مركبة الاتجاه		التوقع اللاحق للمعتمة		التباين اللاحق للمعلمة		المشاهدة	رمز السنة
$Q_t(1)$	$f_t(1)$	m_{12}	m_{11}	C_{22}	C_{21}	Y	X
-	-	-	-	0.050	0.100	-	0
371.234	148.098	7.121	140.977	58.531	87.271	147	1
485.55	173.020	12.163	148.694	36.683	107.842	175	2
564.83	151.319	3.615	140.474	22.614	121.088	150	3
617.102	190.473	11.216	145.609	14.714	128.526	191	4
656.421	187.952	8.705	144.427	10.153	132.820	188	5
690.663	179.067	5.982	143.175	7.364	135.447	179	6
723.673	199.997	8.024	143.828	5.559	137.146	200	7
757.468	220.088	9.469	144.334	4.333	138.300	220	8
793.215	207.889	7.133	143.688	3.467	139.116	208	9
831.494	230.064	8.602	144.037	2.834	139.710	230	10

والمقارنة بين النتائج المستحصلة في تقدير مركبة الاتجاه والتنبؤ لسنة قادمة يمكننا ملاحظتها في العمود الأخير من الجدول(2) والعمود قبل الأخير من الجدول (3) . ونستنتج أن استخدام النماذج الهرمية الحركية يعمل على إقلال الخطأ العشوائي ويتحاشى مشاكل نماذج الانحدار الخطي . كما إن استخدام النماذج الهرمية الحركية يزودنا بمعلومات شاملة ودقيقة عن البيانات المدروسة وكما هو واضح في الجدول (3) . لذا نوصي باستخدام النماذج الهرمية الحركية في عملية التقدير والتنبؤ للبيانات التي لها نفس صفات البيانات في المثال المقدم في هذا البحث.

المصادر (References)

1. ابـو صـالح، محمـد صـبحي ،وعوض، عـدنان محمـد(1990)((مقدمـة في الاحصاء)) مركز الكتب الاردني.
2. كـاظم، امـوري هـادي، والدليمي، محمـد مناجـد(1988)((مقدمـة في تحليـل الانحـدار الخطـي)) وزارة التعلـيم العـالي والبحـث العلمـي ، كليـة الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد.
3. Gamerman,D. and Migon,H.S.,(1993) " Dynamic Hierarchical Models"J.R.Statist.Soc.B,Vol.55,No.3,pp.(629-642)
4. Harrison,P.J. and Stevens,G.F.(1976),"Bayesian Forecasting (With Discussion" ,J.R.Statist. Soc.,B,Vol.38,pp(205-247)
5. Lindley,D.V. and Smith, A.F.M.(1972)" Bayes, Estimates for the Linear Model J.R.Statist. Soc. ,B,Vol.34,pp(1-41)
6. West,M.and Harrison,P.J.(1997) ," Bayesian Forecasting and Dynamic Models 2nd edn. Springer-Verlag, New York.